UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS I (MA-1111)

Elaborado por
Samuel Alonso
14-10028
Ing. Telecom

6 de marzo de 2017

Límites, Teorema del Emparedado, Continuidad, Teorema de Valor Intermedio

Resolución Segundo Parcial 2014 Abril-Julio Tipo B

1. Resuelva los siguiente límites

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \quad b)\ \lim_{x\to \frac{1}{2}^-}\frac{2x-1}{4x^2-4x+1} \quad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin x}{x\cos x} \quad d)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

a) Mediante una racionalización apropiada, el límite puede evaluarse directamente.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3)-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}.$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}+2=4$$

b) Observemos primero que el denominador asemeja mucho a el cuadrado de una expresión. En efecto, nótese que $4x^2-4x+1=4(x-1/2)^2$. Operando la expresión,

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}\frac{2x-1}{4x^2-4x+1}=\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}\frac{2x-1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Tomando factor común 2 del numerador, obtenemos

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}\frac{x-\frac{1}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}\frac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}.$$

Finalmente, como $x-1/2\to 0^-$ a medida que $x\to(1/2)^-$, entonces $(x-1/2)^{-1}\to-\infty$, y por ende

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}\frac{2x-1}{4x^2-4x+1}=-\infty.$$

c) Primero, separemos la expresión en una suma. Como $\cos x$ esta definida en 0 y $\cos x \to 1$ a medida que $x \to 0$, la estrategia será utilizar el límite notable $\sin x/x \to 1$, $x \to 0$ para simplificar la expresión.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + \sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x\cos x} + \frac{\sin x}{x\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos^2 x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}.$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos^2 x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x},$$

y finalmente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + \sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 2.$$

d) Para simplificar la expresión y evitar errores en los signos, podemos tomar el cambio de variables $u = -x$. Obtenemos

$$\lim_{u\to\infty}\frac{-2u}{\sqrt{u^2+1}+u}.$$

Tomando factor común u^2 de la raíz, y luego de u en el numerador y denominador,

$$\lim_{u\to\infty}\frac{-2u}{\sqrt{u^2+1}+u} = \lim_{u\to\infty}\frac{-2u}{u\sqrt{1+u^{-2}}+u} = \lim_{u\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+u^{-2}}+1}.$$

El límite puede evaluarse directamente ahora.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{u\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+u^{-2}}+1} = -1$$

2. Sea g una función tal que $|g(x)-2| \leq 3(x-1)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Hallar

$$\lim_{x\to 1} g(x).$$

Consideremos una función f tal que $f(x) = g(x) - 2$. Entonces, es claro que

$$|f(x)| \leq 3(x-1)^2,$$

y que por ende

$$-3(x-1)^2 \leq f(x) \leq 3(x-1)^2.$$

Si ahora consideramos $f(x)$ a medida que $x \to 1$, tenemos que

$$\lim_{x\to 1} -3(x-1)^2 \leq \lim_{x\to 1} f(x) \leq \lim_{x\to 1} 3(x-1)^2.$$

Pero como

$$\lim_{x\to 1} -3(x-1)^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1} 3(x-1)^2 = 0,$$

Entonces, de acuerdo al Teorema del Emparedado,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0,$$

y finalmente, como $f(x) = g(x) - 2$,

$$\lim_{x\to 1}(g(x)-2) = 0 \implies \lim_{x\to 0} g(x) = 2.$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x-4}{x^3-x^2+x-1}, & x < 1 \\ ax+b, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{|x-3|}{x+1}, & x \geq 2 \end{cases}$$

Hallar, si es posible, los valores de a y b que hacen a f continua en todo su dominio.

Para garantizar la cotinuidad de f en su dominio, en particular, se deben escoger a y b tales que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = f(2),$$

condiciones que, de ser supuestas satisfechas, implican la existencia de los límites laterales respectivos. Ahora, si bien

$$\frac{|x-3|}{x+1}$$

está definida para $x = 2$, y además, a y b en principio podrían ajustarse para que los límites laterales existan,

$$\frac{x^2+3x-4}{x^3-x^2+x-1}$$

se vuelve indeterminada a medida que $x \to 1^-$. Consideremos entonces

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3x-4}{x^3-x^2+x-1}.$$

Como tanto el numerador como el denominador se anulan para $x = 1$, esta raíz corresponde a un factor $(x-1)$ en ambas expresiones. Por ende, podemos factorizar x^2+3x-4 como $(x-1)(x+4)$ y, luego de una segunda inspección, factorizar a x^3-x^2+x-1 como $(x-1)^3$. Entonces, evaluando directamente

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3x-4}{x^3-x^2+x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+4}{(x-1)^2} = \infty.$$

Puesto que la expresión tiende al infinito, es imposible hallar valores para a y b tal que la función sea continua en todo su dominio. De hecho, la función no podría ser continua ni siquiera si se escogiera un punto después del 1, para que la expresión volviera, por así decirlo, del infinito.

4. Pruebe que la ecuación $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ tiene al menos una solución real.

   Para demostrar esto, basta invocar el Teorema de Valor Intermedio de forma apropiada. Consideremos que

$$\lim_{x\to\infty} x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = \lim_{x\to\infty} x^5(1 + 4x^{-2} - 7x^{-4} + 14x^{-5}) = \infty,$$

   y que, de igual manera

$$\lim_{x\to-\infty} x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = \lim_{x\to-\infty} x^5(1 + 4x^{-2} - 7x^{-4} + 14x^{-5}) = -\infty.$$

   Si consideramos que f es una función tal que $f(x) = x^5 + 4x^3 - 7x + 14$, entonces vemos por lo anterior que $f(x) > 0$ a medida que $x \to \infty$, y que $f(x) < 0$ a medida que $x \to -\infty$. Finalmente, como f es continua, de acuerdo al Teorema de Valor Intermedio existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$, lo cual implica que $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ tiene al menos una solución en $\mathbb{R}$. Esta estrategia es válida para **cualquier** polinomio de grado impar, y de hecho este resultado es presentado como un pequeño teorema.

Nota: Este material fue elaborado por Samuel Alonso con ejercicios obtenidos del segundo parcial de Abril-Julio del 2014 (tipo B), y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Samuel Alonso
Carnet: 14-10028
Ingeniería en Telecomunicaciones
Twitter: @zickpic

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com